

Devoir surveillé

durée : 1 heure

Exercice 1 : Calcul de limites (6 points)

1. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x) = \frac{5x^4 - x^2 + 10}{-2x + \sqrt{x}}$
2. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$
3. Déterminer les limites à gauche et à droite quand x tend vers $\frac{4}{3}$ de $h(x) = \frac{3x+1}{-3x^2+7x-4}$

Exercice 2 : Étude de fonction (14 points)On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1-3x}{e^x - x}$$

Partie AOn considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (3x-4)e^x + 1$$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (3x-1)e^x$.
3. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\alpha < \beta$.
5. Dresser le tableau de signes de la fonction g .
6. Montrer $-3 < \alpha < -2$, puis déterminer un encadrement de β à 10^{-3} près.
On admet de plus que $1,236 < \beta < 1,237$

Partie B

1. (bonus) Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f' et le tableau de variations de la fonction f .
4. Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha-4}{\alpha-1}$
5. (bonus) Déterminer une expression de $f(\beta)$